

# 斜入射下介质柱二维电磁散射问题的一种数值分析方法

周后型, 洪伟, 许锋  
(东南大学毫米波国家重点实验室, 江苏南京 210096)

**摘要:** 采用矩量法, 共轭梯度法和快速傅里叶变换的混合方法来分析任意形状截面的非均匀各向异性的介质柱在斜入射条件下的二维电磁散射. 在这个方案中, 采用关于总电场的微-积分方程, 借助于包含介质柱的一个矩形来产生离散网格, 而离散量的线性方程组仍然建立在原介质柱截面区域上. 这样既不会扩大原问题的规模, 又可以有效地利用共轭梯度法与快速傅里叶变换的结合算法 CG-FFT 来求解. 文中给出了数值算例, 证实了该方案的有效性.

**关键词:** 矩量法; 共轭梯度法; 快速傅里叶变换; 电磁散射; 介质柱

**中图分类号:** TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 01-0085-04

## A Numerical Scheme to Analyze 2D EM Scattering by a Dielectric Cylinder Under Oblique Incidence

ZHOU Hou-xing, HONG Wei, XU Feng

(State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** The hybrid technique of moment method, conjugate gradient method, and fast Fourier transform is applied to analyze 2D electromagnetic scattering from a dielectric cylinder with arbitrary inhomogeneity and anisotropy under oblique incidence. In the scheme, the integro-differential equation for the total electric field is used. In this way, the size of original question is not enlarged, and the linear system can be efficiently solved by a combination of the conjugate gradient method with the fast Fourier transform. Some numerical results are given in this paper, which demonstrate validity of the scheme.

**Key words:** moment method; conjugate gradient method; fast Fourier transform; electromagnetic scattering; dielectric cylinder

### 1 引言

在矩量法求解电磁问题的过程中, 所涉及的线性方程组的系数矩阵是稠密阵. 由于受计算机内存和计算时间的限制, 矩量法很难用于计算电大尺寸目标的电磁问题. T. K. Sarkar 等人<sup>[1]</sup>提出的 MoM-CG-FFT 技术在一定程度上克服了上述缺点. MoM-CG-FFT 有两个优点: 一是可以大大降低对内存的需求量, 二是可以使共轭梯度法的迭代速度提高很多. 但是, MoM-CG-FFT 并不提高共轭梯度法的收敛速度. 事实上, 共轭梯度法的收敛速度取决于线性方程组的系数矩阵的条件数. 在用 MoM-CG-FFT 技术求解某类电磁问题时, 必须经过相应的处理. 文献[2]采用了 MoM-CG-FFT 技术来分析任意形状截面的非均匀各向异性的介质柱在斜入射条件下的二维电磁散射. 该文的处理方法是扩大问题的规模为代价的, 这无疑会使系数矩阵的条件数变大, 从而使共轭梯度法的收敛速度变得缓慢. 本文仍采用关于总电场的微-积分方程, 借助于包含介质柱的一个矩形来产生离散网格, 但离散量的线性方程组仍然建立在原介质柱截面区域上. 这样既不会扩大原问题的

规模, 又可以有效地利用共轭梯度法与快速傅里叶变换的结合算法 CG-FFT 来求解.

### 2 微-积分方程

设介质柱置于如图 1 所示的坐标系中, 柱体在  $z$  方向上是均匀无限长的, 其横截面具有任意形状. 设介质材料是非均匀各向异性和无耗的, 其磁导率与自由空间的相同, 相对介电常数张量记为  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(x, y)$ . 设柱体被一个时谐平面波斜入射, 其入射电场为  $E^i e^{-jz}$ . 利用矢量磁位和洛伦兹条件, 可得关于总电场的微-积分方程

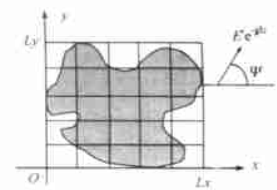


图1 任意截面的柱体和坐标系

$$\begin{aligned} E'(r) = E(r) &+ \frac{j}{4} [k_0^2 + (\nabla_x^2 - j\Delta)] (\nabla_x^2 - j\Delta) \\ &H_0^{(2)}(k_0 |r - r'|) [J(r) - \bar{J}] \cdot E(r) dr \\ &D_c \end{aligned}$$

收稿日期: 2001-10-19; 修回日期: 2002-04-25

基金项目: 本文得到国家杰出青年基金 (No. 9625102)

式中  $\nabla_t = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\bar{\Gamma}$  是单位并矢,  $D_c$  是柱体横截面区域,  $k_t^2 = k_0^2 - \beta^2$ ,  $H_0^{(2)}(\cdot)$  是第二类零阶 Hankel 函数.

用一个矩形  $D_r$  将柱体横截面  $D_c$  围住. 将相对介电常数张量  $\bar{\epsilon}$  的定义域扩张到  $D_r$  上, 即当  $(x, y) \in D_r - D_c$  时,  $\bar{\epsilon} = 1$ . 设矩形区域  $D_r$  沿  $\hat{x}$  方向长  $L_x$ , 沿  $\hat{y}$  方向长  $L_y$ , 并分别作  $N_x, N_y$  等分, 其段长分别为  $\Delta x = L_x / N_x, \Delta y = L_y / N_y$ . 这时矩形区域  $D_r$  被离散成  $N_x N_y$  个小矩形  $D_{mn}$ , 其中心点为  $(x_m, y_n)$ , 这里  $x_m = (m + 0.5) \Delta x, y_n = (n + 0.5) \Delta y$ , 下标从 0 起取值. 将未知矢量  $E$  函数用二维脉冲基展开, 相对介电常数张量  $\bar{\epsilon}$  也用二维脉冲基展开

$$E = \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} E_{mn} P_{mn}, \bar{\epsilon} = \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} \bar{\epsilon}_{mn} P_{mn}$$

$$P_{mn}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D_{mn} \\ 0, & (x, y) \notin D_{mn} \end{cases}$$

在各小矩形中心处点配, 得到线性方程组如下

$$\begin{bmatrix} E_{mn}^{(1)} \\ E_{mn}^{(2)} \\ E_{mn}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mn}^{(1)} \\ E_{mn}^{(2)} \\ E_{mn}^{(3)} \end{bmatrix} + \sum_{s=0}^{N_x-1} \sum_{t=0}^{N_y-1} T_{m,n}^{s,t} K_{s,t} \begin{bmatrix} E_{st}^{(1)} \\ E_{st}^{(2)} \\ E_{st}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$0 \leq m < N_x - 1; 0 \leq n < N_y - 1$$

$$K_{s,t} = \bar{\epsilon}_{mn} - \bar{\Gamma}, T_{m,n}^{s,t} = [T_{m,n}^{s,t}(1), T_{m,n}^{s,t}(2), T_{m,n}^{s,t}(3)]$$

$$T_{m,n}^{s,t}(1) = \begin{bmatrix} (k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f(m, m; s, t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(m, n; s, t) \\ -j \frac{\partial}{\partial x} f(m, n; s, t) \end{bmatrix}$$

$$T_{m,n}^{s,t}(2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(m, n; s, t) \\ (k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) f(m, m; s, t) \\ -j \frac{\partial}{\partial y} f(m, n; s, t) \end{bmatrix}$$

$$T_{m,n}^{s,t}(3) = \begin{bmatrix} -j \frac{\partial}{\partial x} f(m, n; s, t) \\ -j \frac{\partial}{\partial y} f(m, m; s, t) \\ (k_0^2 - \beta^2) f(m, n; s, t) \end{bmatrix}$$

这里

$$f(x, y; s, t) = \int_{D_{s,t}} H_0^{(2)}(k_t \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_t)^2}) dx dy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(m, n; s, t) := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y; s, t) |_{x_m, y_n}$$

其余符号类推. 方程组的矩阵形式为

$$(I + TK) X = B \tag{1}$$

其中  $I$  是  $3N_x N_y$  阶单位阵,

$$K = \text{diag}[K_0, K_1, \dots, K_{N_x-1}]$$

$$K_s = \text{diag}[K_{s,0}, K_{s,1}, \dots, K_{s,(N_x-1)}]$$

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & \dots & T_{N_x-1} \\ T_1 & T_0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & T_1 \\ T_{N_x-1} & \dots & T_1 & T_0 \end{bmatrix}$$

$$T_u = \begin{bmatrix} T_{u,0} & T_{u,1} & \dots & T_{u,(N_y-1)} \\ T_{u,1} & T_{u,0} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & T_{u,1} \\ T_{u,(N_y-1)} & \dots & T_{u,1} & T_{u,0} \end{bmatrix}$$

$$T_{u,v} = [t_{ij}^{(u,v)}]_{3 \times 3} := T_{u,v}^{0,0}$$

$$X = [X_0, X_1, \dots, X_{N_x-1}]^T$$

$$X_u = [X_{u,0}, X_{u,1}, \dots, X_{u,(N_x-1)}]^T$$

$$X_{u,v} = [x_{u,v}^{(0)}, x_{u,v}^{(1)}, x_{u,v}^{(2)}]^T$$

$B$  的分块方法与  $X$  的相同.  $T$  是一个三重分块矩阵. 如果把  $T_{u,v}$  视为一个数, 则  $T$  就是一个二重 Toeplitz 矩阵.  $T$  的这一特征有助于利用 FFT 实现矩阵向量积.

线性方程组 (1) 是原问题的定义域从  $D_c$  扩大为  $D_r$  后得到的. 为了获得原问题在  $D_c$  上的线性方程组, 而且又要充分利用线性方程组 (1) 的结构, 引进一个  $3N_x N_y$  阶的对角线矩阵

$$D = \text{diag}[D_0, D_1, \dots, D_{N_x-1}]$$

$$D_i = \text{diag}[D_{i,0}, D_{i,1}, \dots, D_{i,(N_x-1)}]$$

$$D_{m,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{m,n} = \begin{cases} 1, & (x_m, y_n) \in D_c \\ 0, & (x_m, y_n) \notin D_c \end{cases}$$

用下面的线性方程组 (2) 替换上面的线性方程组 (1)

$$D(I + TK) DX = DB \tag{2}$$

这就是在原定义域  $D_c$  上求解原问题时, 关于离散量的线性方程组的一种辅助形式. 这种形式有利于降低存储量和应用 FFT 实现矩阵向量积. 具体地说, 如果获得了式 (2) 的解  $X = \{x_{ij}^{(k)}\}$ , 那么  $\{x_{ij}^{(k)} | (x_i, y_j) \in D_c\}$  便是原问题的线性方程组的解.

### 3 矩阵向量积 TX 的实现

在 CG 算法的迭代过程中, 需要计算大量的矩阵向量积  $TX$  和  $T^* X$ . 这里介绍快速计算方法. 记  $Y = TX$ ,  $Y$  的分块方法与  $X$  相同 (见第 2 节). 又令

$$T^{(s,t)} = \begin{bmatrix} T_0^{(s,t)} & T_1^{(s,t)} & \dots & T_{N_x-1}^{(s,t)} \\ T_1^{(s,t)} & T_0^{(s,t)} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & T_1^{(s,t)} \\ T_{N_x-1}^{(s,t)} & \dots & T_1^{(s,t)} & T_0^{(s,t)} \end{bmatrix}$$

$$T_u^{(s,t)} = \begin{bmatrix} t_{st}^{(u,0)} & t_{st}^{(u,1)} & \dots & t_{st}^{(u,N_x-1)} \\ t_{st}^{(u,1)} & t_{st}^{(u,0)} & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{st}^{(u,1)} \\ t_{st}^{(u,N_x-1)} & \dots & t_{st}^{(u,1)} & t_{st}^{(u,0)} \end{bmatrix}$$

$$X^{(t)} = [X_0^{(t)}, X_1^{(t)}, \dots, X_{N_x-1}^{(t)}]^T$$

$$X_u^{(t)} = [x_{u,0}^{(t)}, x_{u,1}^{(t)}, \dots, x_{u,N_x-1}^{(t)}]$$

$$Y^{(s)} = [Y_0^{(s)}, Y_1^{(s)}, \dots, Y_{N_x-1}^{(s)}]^T$$

$$Y_u^{(s)} = [y_{u,0}^{(s)}, y_{u,1}^{(s)}, \dots, y_{u,N_x-1}^{(s)}]$$

则有

$$Y^{(s)} = T^{(s,0)} X^{(0)} + T^{(s,1)} X^{(1)} + T^{(s,2)} X^{(2)}, S=0,1,2$$

各项中的矩阵向量积均可借助于 FFT 来快速计算. 当获得了  $Y^{(0)}, Y^{(1)}, Y^{(2)}$  后, 就可以整合出  $Y$  来.  $Y^* X$  的计算是类似的. 涉及 FFT 快速计算的细节可参见文献[3].

### 4 数值实验

本文中的计算都是在主频为 633MHz 的微机上进行的. 用  $\lambda$  表示自由空间波长. RCS 方向图中实际给出对数形式的量, 即

$$RCS' / (\text{dB}) = 20 \log_{10} (RCS' / \lambda^2)$$

设入射电场为

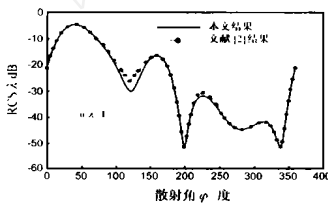


图 2 矩形截面柱体的 RCS

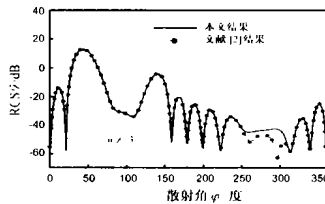


图 3 矩形截面柱体的 RCS

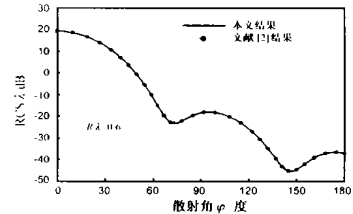


图 4 圆形截面柱体的 RCS

(2) 设  $D_c$  是半径为  $R$ , 中心在  $(R, R)$  的圆. 又设  $\Omega$  元素为

$$\omega_0(x, y) = 1 + (x - 1)(1 - x^2),$$

$$\omega_1(x, y) = 1 + (y - 1)(1 - y^2),$$

$$\omega_2(x, y) = 1 + (z - 1)(1 - z^2),$$

$$\omega_{ij}(x, y) = 0, i \neq j,$$

其中  $x = 2.25, y = 2.0, z = 1.75, \Omega = (x - R)^2 / R^2 + (y - R)^2 / R^2, \theta = 0^\circ, k_0 = 0.3, A_y = 0.0(\text{V/m}), A_x = -k_z, A_z = 1.0, R / \lambda = 0.6$ . 取  $L_x = L_y = 2R, N_x = N_y = 32$ . 对方程组 (2) 求解. 图 4 给出 RCS 曲线图. 本文结果与文献[2]的结果吻合.

(3) 现在就方程组 (1) 和 (2) 的求解速度作一比较. 设  $D_c$  是由一个半径为  $R$ , 中心在  $(R, R)$  处的圆和一个半径为  $R_1 = 4R/5$ , 中心在  $(R/5, R)$  处的圆所围成, 见图 5. 设  $k_0 = 0.45, A_x = A_y = 1.0(\text{V/m}), A_z = -(A_x k_z \cos \theta + A_y k_z \sin \theta) / k_0, \theta = 90^\circ, R = 2, \Omega$  元素为

$$\omega_0(x, y) = 2 - (x - R) / R,$$

$$\omega_1(x, y) = 2 + (y - R) / R,$$

$$\omega_2(x, y) = 1.2,$$

$$\omega_{ij}(x, y) = 0, i \neq j,$$

$$E^i e^{-jz} = (\hat{A}_x + j\hat{A}_y + \hat{A}_z) e^{-j(k_x x \cos \theta + y \sin \theta) + z}$$

其中  $A_x k_z \cos \theta + A_y k_z \sin \theta + A_z = 0$ . 介质柱的 RCS 定义为

$$RCS(\phi) = \lim_{|S^i|} \frac{\text{Re}(S^s \cdot \hat{\Lambda})}{|S^i|}$$

其中  $S^s$  和  $S^i$  分别是散射场和入射场的复数 Poynting 矢量,  $\hat{\Lambda}$  是散射场传输方向在  $xoy$  平面上的投影正向的单位矢量, 即  $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi, \phi$  是  $\hat{\Lambda}$  与  $x$  轴正向间的夹角. 远区散射场的传输方向为  $\hat{k}_t + \hat{z}$ , 故可得

$$RCS(\phi) = \lim_{k_0} \frac{2 |k_z| |E_\phi^s|^2 + k_z |E_z^s|^2 - \text{Re}(E^s E^{s*})}{|E^i|^2}$$

$$E_\phi^s = E_x^s \cos \phi + E_y^s \sin \phi$$

$$E_z^s = -E_x^s \sin \phi + E_y^s \cos \phi$$

其中  $E^{s*}$  是  $E^s$  的复共轭.

(1) 设  $D_c$  为  $x$  边长  $= 0.15, y$  边长  $= w$  的矩形. 又设  $\Omega = 2\bar{\Omega}, \bar{\Omega} / k_0 = 0.3, \theta = 45^\circ, A_x = 1.0(\text{V/m}), A_y = -1.0, A_z = 0.0$ . 取  $L_x = 0.3, L_y = 2w, N_x = 2, w / \lambda$  分别取  $1.0 (N_y = 16)$  和  $3.0 (N_y = 32)$ . 对方程组 (2) 求解. 图 2 和图 3 给出 RCS 曲线图. 将本文结果与文献[2]的结果对照, 除有局部分离外, 绝大部分都吻合.

这里取  $L_x = L_y = 2R, N_x = N_y = 64$ . 停机准则取为  $|s^{(k)} / s^{(0)}| < 10^{-3}$ .

解方程组 (1) (这是文献[2]的方案), CG 算法迭代 141 次, 耗 574 秒. 解方程组 (2) (这是本文的方案), CG 算法迭代 94 次, 耗时 378 秒. 图 6 给出 RCS 曲线图.

一般地, 电尺寸越大, 或要求的精度越高, 两种解法所耗时间的差就越大.

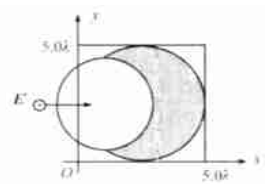


图 5 非凸形截面柱体

### 5 结论

本文介绍了将 MoM-CG FFT 混合技术具体应用于任意形状截面的非均匀各向异性的介质柱在斜入射下的二维电磁散射分析的过程. 本文工作是以文献

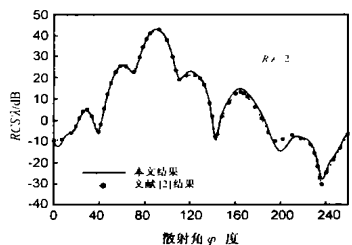


图 6 非凸形截面柱体的 RCS

[2]为基础的,但作了重大改进,即将原问题放在原定义域上求解,这样不至于扩大问题规模而使算法收敛缓慢.在叙述方法上,本文采用了严格的分块矩阵形式,其目的在于为编制计算机程序提供清晰的思路.必须指出,目前的算法是针对斜入射情形的.如果将目前的算法用于通常的 TM 情形,则所耗的时间约为直接针对 TM 情形的算法的三倍.

#### 参考文献:

- [ 1 ] T K Sarkar ,E Arvas ,S M Rao. Application of FFT and the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic radiation from electrically large and small conducting bodies[J]. IEEE Trans AP,1986, 34(5) :635 - 640.
- [ 2 ] C C Su. Calculation of electromagnetic scattering from a dielectric cylinder using the conjugate gradient method and FFT[J]. IEEE Trans AP,1987,35(12) :1418 - 1425.
- [ 3 ] 周后型,童创明,洪伟. 预条件共轭梯度法在线天线阵列 RCS 分析中的应用[J]. 应用科学学报,2001,19(2) :145 - 148.

#### 作者简介:



周后型 男,1956 年生于四川省宜宾市,1995 年于西南师范大学数学系获硕士学位,2002 年于东南大学获博士学位,现为东南大学计算电磁研究中心副教授,研究方向是电磁场的数值计算,发表论文 30 篇.



洪伟 男,1962 年生于河北省张家口市,1988 年于东南大学获博士学位,现为东南大学无线电系教授、博士生导师、副系主任,在国内外权威学术刊物上发表论文 200 多篇,学术专著一部,获一项国家自然科学基金四等奖、两项国家教委科技进步一等奖等多项奖励,获国家人事部“突出贡献中青年专家”等多项荣誉称号,获“国家杰出青年基金”和国家教委“跨世纪优秀人才基金”等,任多种国内外刊物,《电子学报》,《微波学报》,《电波科学学报》等的审稿人和编委.

www.cnki.net